第 3 講　2 次曲線と離心率，媒介変数表示

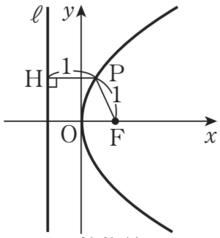
PART1　2 次曲線と離心率

要点整理と公式

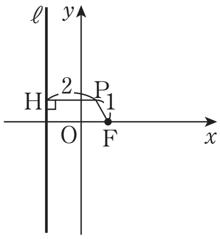
要点 ①　2 次曲線の離心率

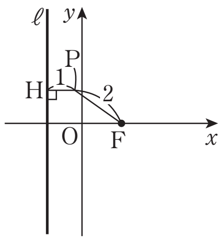
放物線は，定点 F からの距離と，F を通らない定直線 ℓ からの距離が等しい，すなわち距離の比が 1：1 である点 P の軌跡である。

定点 F からの距離と，F を通らない定直線 ℓ からの距離の比が 1：1 以外の場合の，点 P の軌跡について考える。



放物線





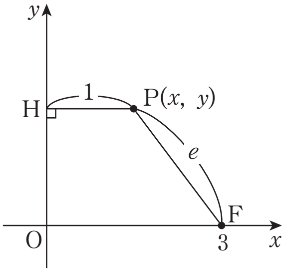
(ex) e を正の定数とする。点 F$(3,\ 0)$ からの距離と，y 軸からの距離の比が e：1 である点 P$(x,\ y)$ の軌跡を考える。

点 P から y 軸に下ろした垂線を PH とする。

PF：PH $= e$：1 より ePH $=$ PF　　つまり e^2PH$^2 =$ PF^2

$$e^2x^2 = (x-3)^2 + y^2$$

$$(1-e^2)x^2 - 6x + y^2 + 9 = 0$$



$e = 1$ のとき　$y^2 = 6x - 9$

よって「　　　　」　$y^2 = 6\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$

$e = \dfrac{1}{2}$ のとき　$\dfrac{3}{4}x^2 - 6x + y^2 + 9 = 0$　　$3(x-4)^2 + 4y^2 = 12$

よって「　　　　」　$\dfrac{(x-4)^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$

$e = 2$ のとき　$-3x^2 - 6x + y^2 + 9 = 0$　　$3(x+1)^2 - y^2 = 12$

よって「　　　　」　$\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$

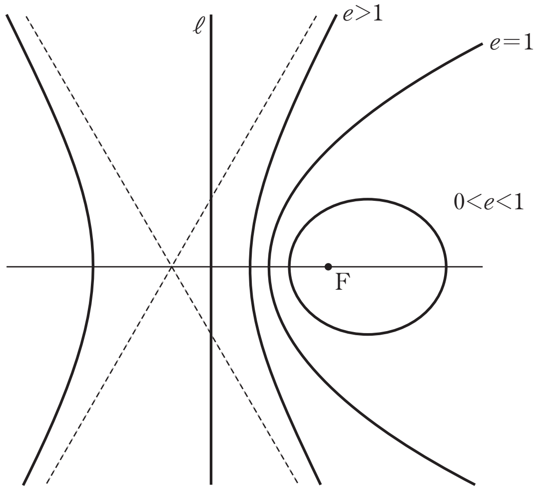
一般に，定点Fからの距離と，Fを通らない定直線 ℓ からの距離の比が $e:1$ である点Pの軌跡は，Fを1つの焦点とする2次曲線であり

$0<e<1$ のとき　楕円

$e=1$ のとき　放物線

$e>1$ のとき　双曲線

であることが知られている。



この e の値を，2次曲線の「離心率」といい，直線 ℓ を「準線」という。

1 点 F(5, 0) からの距離と，直線 $x=-1$ からの距離の比が次のような点 P の軌跡を求めよ。

(1) 1：1　　(2) 1：2　　(3) 2：1

Point Pickup

2次曲線の離心率と軌跡

定点 F からの距離と，F を通らない定直線 ℓ からの距離の比が

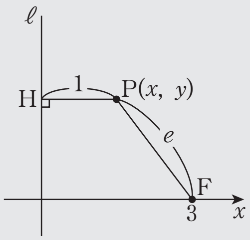
e：1 である点 P の軌跡は

$0<e<1$ のとき　楕円

$e=1$ のとき　放物線

$e>1$ のとき　双曲線

この e の値を，2次曲線の「離心率」という。



第 3 講 PART1 確認問題

点 F(1, 0) からの距離と，直線 $x=-2$ からの距離の比が次のような点 P の軌跡を求めよ。

1 1：1

軌跡：放物線 $y^2=\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}$

2 1：2

軌跡：楕円 $\dfrac{\left(x-\boxed{\text{ウ}}\right)^2}{\boxed{\text{エ}}}+\dfrac{y^2}{\boxed{\text{オ}}}=1$

3 2：1

軌跡：双曲線 $\dfrac{\left(x+\boxed{\text{カ}}\right)^2}{\boxed{\text{キ}}}-\dfrac{y^2}{\boxed{\text{クケ}}}=1$

第 3 講　2 次曲線と離心率，媒介変数表示

PART1 2 次曲線と離心率

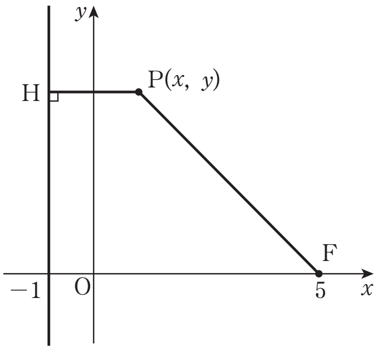
1 点 F(5, 0) からの距離と，直線 $x=-1$ からの距離の比が次のような点 P の軌跡を求めよ。

(1)　1：1　　　(2)　1：2　　　(3)　2：1

[解答]

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$\mathrm{PF}^2=(x-5)^2+y^2$，$\mathrm{PH}^2=(x+1)^2$



(1)　PF：PH＝1：1　より　PH＝PF

つまり　$\mathrm{PH}^2=\mathrm{PF}^2$

よって $(x+1)^2=(x-5)^2+y^2$

$x^2+2x+1=x^2-10x+25+y^2$

$y^2=12(x-2)$

したがって，点 P の軌跡は　放物線　$y^2=12(x-2)$

(2)　PF：PH＝1：2　より　PH＝2PF　つまり　$\mathrm{PH}^2=4\mathrm{PF}^2$

よって $(x+1)^2=4\{(x-5)^2+y^2\}$

$x^2+2x+1=4x^2-40x+100+4y^2$

$$\frac{(x-7)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

したがって，点 P の軌跡は　楕円　$\dfrac{(x-7)^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$

(3)　PF：PH＝2：1　より　2PH＝PF　つまり　$4\mathrm{PH}^2=\mathrm{PF}^2$

よって $4(x+1)^2=(x-5)^2+y^2$

$4x^2+8x+4=x^2-10x+25+y^2$

$$\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$$

したがって，点 P の軌跡は　双曲線　$\dfrac{(x+3)^2}{16}-\dfrac{y^2}{48}=1$

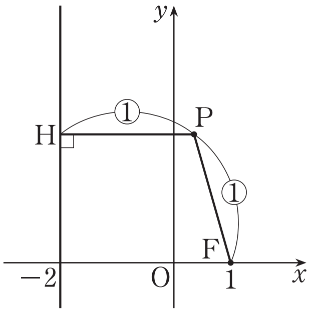
第 3 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：6，イ：3

[解説]

点Pの座標を$(x,\ y)$，点Pから直線$x=-2$に引いた垂線をPHとする。



$$PF^2=(x-1)^2+y^2$$

$$PH^2=(x+2)^2$$

PF：PH＝1：1より，

PF＝PHだから，

$$PF^2=PH^2$$ [A]

[A]　両辺を2乗する。

$$(x-1)^2+y^2=(x+2)^2$$

$$x^2-2x+1+y^2=x^2+4x+4$$

$$y^2=6x+3$$

よって，点Pの軌跡は，

放物線 $\boldsymbol{y^2=6x+3}$

2

[正解] ウ：2，エ：4，オ：3

[解説]

PF：PH＝1：2 より，PH＝2PF だから， [B]

$$PH^2=4PF^2$$

$$(x+2)^2=4\{(x-1)^2+y^2\}$$

$$x^2+4x+4=4x^2-8x+4+4y^2$$

$$3x^2-12x+4y^2=0$$

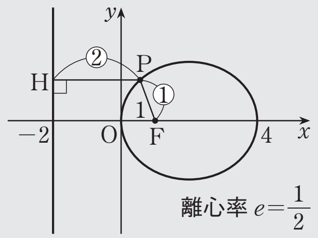
$$3(x-2)^2+4y^2=12$$

$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

よって，点 P の軌跡は，

楕円 $\boldsymbol{\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1}$ [C]

[B]



[C] これは，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ を x 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。

曲線 $\dfrac{(x-p)^2}{a^2}+\dfrac{(y-q)^2}{b^2}=1$ は楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

3

[正解] カ：3，キ：4，クケ：12

[解説]

PF：PH＝2：1 より，2PH＝PF だから， [D]

$$4PH^2=PF^2$$

$$4(x+2)^2=(x-1)^2+y^2$$

$$4x^2+16x+16=x^2-2x+1+y^2$$

$$3x^2+18x-y^2+15=0$$

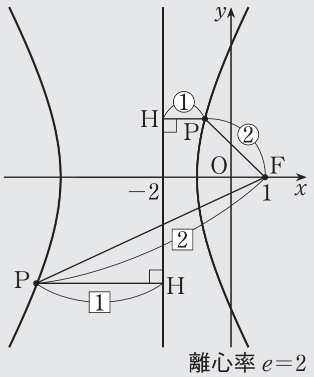
$$3(x+3)^2-y^2=12$$

$$\frac{(x+3)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

よって，点 P の軌跡は，

双曲線 $\boldsymbol{\dfrac{(x+3)^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1}$ [E]

[D]



[E] これは，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ を x 軸方向に -3 だけ平行移動したものである。

曲線 $\dfrac{(x-p)^2}{a^2}-\dfrac{(y-q)^2}{b^2}=1$ は双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである。